

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi jesenski ispitni rok – 5. rujna 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

Zadatak 1. (20 bodova)

- (a) Dan je trokut ABC takav da je $\overrightarrow{AB} = (10, -4, 0)$ i $\overrightarrow{AC} = (8, 4, -6)$. Neka su B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Odredite kosinus kuta koji zatvaraju vektori $\overrightarrow{BB_1}$ i $\overrightarrow{CC_1}$.
- (b) Dan je kvadar $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Neka je točka S sjecište pravaca AC i BD , a točka P polovište dužine $\overline{D_1 S}$. Izrazite vektore $\overrightarrow{D_1 S}$ i $\overrightarrow{AP}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AA_1}$.
- (c) Dani su jedinični vektori $\vec{u}$ i $\vec{v} \in V^3$ takvi da je $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Odredite realne brojeve s i t tako da je vektor $(t + s)\vec{u} + (t - s)\vec{v}$ kolinearan s vektorom $2\vec{u} - \vec{v}$ i $|(t + s)\vec{u} + (t - s)\vec{v}| = 3$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi jesenski ispitni rok – 5. rujna 2025.

Zadatak 2. (20 bodova)

Dan je paralelogram $ABCD$ i točke E i F takve da vrijedi $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$. Pravci EF i AC se sijeku u točki S . Odredite omjer u kojem točka S dijeli dužinu $\overline{AC}$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi jesenski ispitni rok – 5. rujna 2025.

Zadatak 3. (20 bodova)Dani su pravac p i q jednadžbama

$$p \dots \frac{x+2}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}, \quad q \dots \frac{x-2}{7} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{-3}.$$

- (a) Dokažite da su pravci p i q mimosmjerni.
- (b) Neka je Π_1 ravnina koja sadrži pravac p i razapeta je vektorom smjera pravca p i vektorom okomitim na vektore smjera od pravaca p i q , a Π_2 ravnina koja sadrži pravac q i razapeta je vektorom smjera pravca q i vektorom okomitim na vektore smjera od pravaca p i q . Odredite jednadžbe ravnina Π_1 i Π_2 .
- (c) Odredite kanonsku jednadžbu zajedničke normale pravca p i q .

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi jesenski ispitni rok – 5. rujna 2025.

Zadatak 4. (20 bodova)

Dana je četverostrana piramida $ABCD O$ kojoj je baza $ABCD$ paralelogram i koordinate vrhova su

$$A = (1, -3, 3), \quad B = (-5, 1, 3), \quad D = (-8, 1, 5) \quad \text{i} \quad O = (2, 5, 9).$$

Neka je P nožište okomice iz vrha O na pravac AB . Točka Q se nalazi na pravcu CD tako da vrijedi $|DQ| = 3|CQ|$. Odredite volumen piramide $OPQA$.

Uputa: Volumen piramide $OPQA$ povezan je s volumenom nekog paralelepipeda.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi jesenski ispitni rok – 5. rujna 2025.

Zadatak 5. (20 bodova)

- (a) Odredite tip krivulje zadane jednadžbom

$$x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x + 3y = 4.$$

- (b) Neka su F_1 i F_2 fokusi elipse $\mathcal{E}$ dane jednadžbom $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Neka je točka P na elipsi $\mathcal{E}$ te točka T težište trokuta F_1F_2P . Dokažite da je geometrijsko mjesto točke T kada točka P varira po elipsi $\mathcal{E}$ također elipsa i odredite jednadžbu te elipse.
- (c) Odredite tangentu na elipsu $\mathcal{E}$ iz (b) djela zadatka u točki $P = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -1\right)$ elipse $\mathcal{E}$.